名师点拨
每周一与您见面，敬请关注！
特邀省、市各名校名师为初中生、高中生各学科各阶段的学习、复习要点做详细指点，阐释学习中的疑点和难点问题，有效地帮助您理解并掌握有关知识。
电话：84783604 邮箱：kbrj@kuaibao.net

导数中常遇的几个问题

江苏省海安高级中学 季林波

导数是中学数学的难点与重点，通过导数把中学数学与大学数学联系起来，导数也是高考的必考内容。导数作为一种工具，在求确定函数的单调性、求函数的单调区间，求函数的极值、最值和求曲线在某一点或过某一点的切线方程等问题方面极为方便，可以解决许多初等数学中需要很高技巧性的问题。但若对导数概念理解不到位或把握不全面，对题意理解不准确，就容易造成会而不对，对而不全的结果。本文拟通过以下典型例题的错解分析，帮助同学们避免出现类似的错误。

易错点一，运用导数的定义求导时在形式上把握不准确

例1 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to 2(\Delta x\to 0)$，求 $f'(x_0)$ 的值。

错解：$\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}\to 1(\Delta x\to 0)$

$\therefore f'(x_0)=1$

正解：$\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{(x_0-2\Delta x)-x_0}=\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}\to -1(\Delta x\to 0)$

$\therefore f'(x_0)=-1$

【点评】运用导数的定义求导时在形式上要严格按定义的形式，应注意两点：一是 Δx 前的符号，二是 Δx 前的系数。

易错点二，运用导数求曲线的切线过某一点问题

例2 过点 $P(2,-1)$ 与曲线 $C: y=x^3-2x^2+x-3$ 相切的切线方程

错解：由题意 $y'=3x^2-4x+1$

$\therefore k=y'|_{x=2}=5$

$\therefore$ 切线方程：$y+1=5(x-2)$ 即 $5x-y-11=0$

正解：设切点坐标 $(x_0, x_0^3-2x_0^2+x_0-3)$ 又 $y'=3x^2-4x+1$

$\therefore k=3x_0^2-4x_0+1$

$\therefore$ 切线方程：$y-(x_0^3-2x_0^2+x_0-3)=(3x_0^2-4x_0+1)(x-x_0)$ 又过 $P(2,-1)$，代入上式解得 $x_0=2$ 或 $x_0=0$

$\therefore$ 切点坐标为 $(2,-1)$ 或 $(0,-3)$

$\therefore$ 切线方程为 $5x-y-11=0$ 或 $x-y-3=0$

【点评】过某点的切线方程中，该点可能是切点也可能不是切点，而在某点处的切线方程中，该点一定是切点。

易错点三，运用导数求函数的单调性时注意定义域

例3 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}$，当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$

错解：

令 $f'(x)>0$，$\therefore ax-1>0$，$\therefore x>\frac{1}{a}$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间 $(\frac{1}{a},+\infty)$

令 $f'(x)<0$，$\therefore ax-1<0$，$\therefore x<\frac{1}{a}$，$\therefore f(x)$ 的单调递减区间 $(-\infty,\frac{1}{a})$

正解：由题意，函数的定义域为 $\{x|x>0\}$

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$

令 $f'(x)>0$，$\therefore ax-1>0$，$\therefore x>\frac{1}{a}$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间 $(\frac{1}{a},+\infty)$

令 $f'(x)<0$，$\therefore ax-1<0$，$\therefore x<\frac{1}{a}$，$\therefore f(x)$ 的单调递减区间 $(0,\frac{1}{a})$

易错点四，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增（递减），则 $f'(x)\ge 0(\le 0)$ 在 (a,b) 恒成立

例4 若函数 $f(x)=x^3-ax^2-x+6$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围

错解：由题意 $f'(x)=3x^2-2ax-1<0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立

则 $\begin{cases} f'(0)<0 \\ f'(1)<0 \end{cases}$

$\therefore a>1$

正解：由题意 $f'(x)=3x^2-2ax-1\le 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立

则 $\begin{cases} f'(0)\le 0 \\ f'(1)\le 0 \end{cases}$

$\therefore a\ge 1$

【点评】当 $a=1$ 时，$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

所以若已知函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增（递减），则一定注意 $f'(x)\ge 0(\le 0)$ 在 (a,b) 恒成立，否则将会遗失区间的端点值。

易错点五，"Δ" 范围的确定

例5 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+1$ 存在极值，求实数 a 的取值范围

错解：由题意 $f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$ 对应方程 $f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)=0$ 有实根

$\therefore \Delta=4a^2-12(a+6)\ge 0$

$\therefore (a-6)(a+3)\ge 0$

$\therefore a\le -3$ 或 $a\ge 6$

正解：由题意 $f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$ 对应方程 $f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)=0$ 有两个不等实根

$\therefore \Delta=4a^2-12(a+6)>0$

$\therefore (a-6)(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 或 $a>6$

【点评】f(x) 有极值等价于其导函数对应方程有实根，其实不然。例如函数 $y=x^3$，其导函数的值可以等于零，但函数在定义域上单调递增，由极值的定义不存在极值。同样三次函数 $f(x)=ax^3+x$ 恰有三个单调区间也等价于其导函数对应方程有两个不等实根

易错点六，设 $f(x)$ 是可导函数，$f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极值的必要不充分条件。

例6 函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$ 在 $x=1$ 时有极值10，求 a,b 的值。

错解：由题意 $f'(x)=3x^2-2ax-b$

$\therefore \begin{cases} f'(1)=3-2a-b=0 \\ f(1)=1-a-b+a^2=10 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

正解：由题意 $f'(x)=3x^2-2ax-b$

$\therefore \begin{cases} f'(1)=3-2a-b=0 \\ f(1)=1-a-b+a^2=10 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

检验：当 $a=3, b=-3$ 时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\ge 0$，

此时 $x=1$ 不是极值点．$\therefore a=-4, b=11$．

例7 已知函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}e^x$，当 $x=$ 　　时，$f(x)$ 有极大值；当 $x=$ 　　时，$f(x)$ 有极小值．

解：由题意，函数的定义域为R

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^x+x^{\frac{2}{3}}e^x$

$=e^x\frac{2+3x}{3x^{\frac{1}{3}}}\ (x\neq 0)$

x	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$		0	−	未定义	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

$\therefore$ 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 有极大值；当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有极小值．

【点评】1．由 $f'(x_0)=0$ 不一定有 $x=x_0$ 是极值点，同学们在解题时一定要注意检验；

2．在 x_0 处有极值，$f'(x_0)$ 不一定等于0，在例7中从函数的定义域为R，而导函数在 $x=0$ 处没有意义，但由极值定义我们发现在0的两侧单调性相反，所以 $x=0$ 处取到极值，此时这样的点我们称为可疑点或不可导点。再如函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 不可导，但 $x=0$ 是它的一个极小值点。

因此，我们在理解导数概念及其几何意义，熟记导数公式、求导法则，对导数运算求值的基础上，利用导数求函数单调区间，确定函数的单调性，求极值、最值时，不仅要总结出其一般方法和规律，还应注意一些易错点。同时有意识地与解析几何、函数单调性、函数极值、最值、二次函数、方程、不等式（数列不等式）的证明进行知识的交汇，注意以函数、数列、立体几何的体积及实际问题为背景的应用题中综合运用导数知识。